IQ DEMODULATION

$$S(t) = I(t) + iQ(t) = r(t)e^{i\varphi(t)} \ , \quad i^2 = -1 \ ,$$

d.h.

$$\operatorname{Re} S(t) = I(t) \ , \ \operatorname{Im}(t) = Q(t) \quad , \quad r(t) = |S(t)| \ , \ \varphi(t) = \arg S(t) \ .$$

Diskrete *samples*, *sample rate* $1/T_s$: $\quad S_n = S(nT_s)$.
Sei f differenzierbar,

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad .$$

Verschiedene Approximationen der Ableitung von $f_n = f(nT_s)$:

$$d_1 f_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{T_s} \quad , \quad d_2 f_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{T_s} \quad , \quad d_3 f_n = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2T_s}$$

FM Demod.

$$\varphi(t) = \arg S(t) = \arctan \frac{Q(t)}{I(t)} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = \tfrac{d}{dt}\varphi(t) &= \frac{1}{1 + \left[\frac{Q(t)}{I(t)}\right]^2} \frac{d}{dt} \frac{Q(t)}{I(t)} = \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{I^2(t) + Q^2(t)} \\ &= \frac{Q'(t)I(t) - Q(t)I'(t)}{|S(t)|^2} \end{aligned} \qquad (*)$$

d1) Approximation $(*)$ linke Seite, $\varphi'(nT_s) \approx d_1\varphi_n = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{T_s}$:

$$S_{n+1}\overline{S}_n = r_{n+1} r_n e^{i(\varphi_{n+1} - \varphi_n)} = I_{n+1}I_n + Q_{n+1}Q_n + i(Q_{n+1}I_n - I_{n+1}Q_n)$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad \varphi_{n+1} - \varphi_n = \arg(S_{n+1}\overline{S}_n) &= \arctan \frac{\operatorname{Im}(S_{n+1}\overline{S}_n)}{\operatorname{Re}(S_{n+1}\overline{S}_n)} \\ &= \arctan \frac{Q_{n+1}I_n - I_{n+1}Q_n}{I_{n+1}I_n + Q_{n+1}Q_n} \end{aligned}$$

d2) Approximation $(*)$ recht Seite, $Q'(nT_s) \approx d_1 Q_n$, $I'(nT_s) \approx d_1 I_n$:

$$\frac{(Q_{n+1} - Q_n)I_n - Q_n(I_{n+1} - I_n)}{|S_n|^2} = \frac{Q_{n+1}I_n - Q_n I_{n+1}}{|S_n|^2} = \frac{\operatorname{Im}(S_{n+1}\overline{S}_n)}{|S_n|^2}$$

d1) & d2) $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \ll \pi/2$:

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{T_s} \approx \frac{\operatorname{Im}(S_{n+1}\overline{S}_n)}{T_s\,|S_n|^2} = \frac{r_{n+1}}{r_n} \frac{\sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n)}{T_s}$$

d3) Wenn Signal FM-moduliert, dann $|S(t)| = r = \text{const}$,

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n \approx \tfrac{1}{r^2} \operatorname{Im}(S_{n+1}\overline{S}_n) = \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

FSK & MSK.

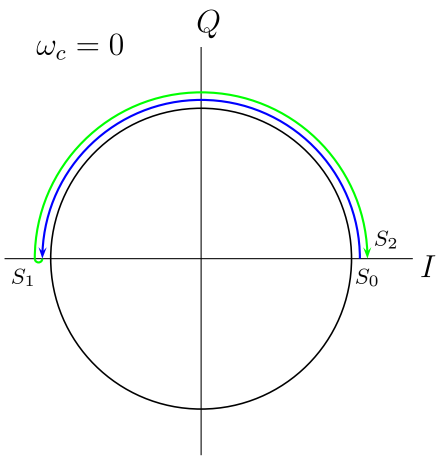
$$\mathrm{Re}\, s(t) \quad , \quad s(t) = r(t)\, e^{i(\omega_c t + \varphi(t))} \quad , \quad \omega_c = 2\pi f_c$$
$$g(t) = e^{-i\omega_c t} s(t) = S(t) = I(t) + iQ(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$$

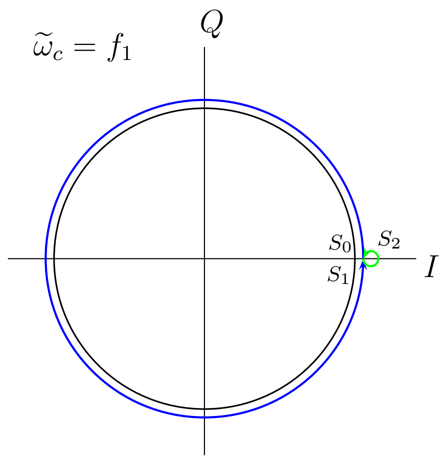
Betrachte *Frequency Shift Keying* (FSK) mit Modulations-Index h, d.h. ist $T = MT_s$ die Symbollänge, so ändert sich die Phase im Intervall $[nT, (n+1)T]$ um $\pm h\pi$. In den Intervallen ist die Frequenz relativ zu $\omega_c = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ entweder $f_1 = -h/(2T)$ oder $f_2 = +h/(2T)$.
O.E. sei $\omega_c = 0$ und $r(t) = 1$, zudem $\Delta f = f_2 - f_1 = h/T$. Innerhalb einer Symbollänge bewegt sich $S(t_m)$ von $S_n = S(nT)$ bis $S_{n+1} = S((n+1)T)$ entweder mit der Frequenz f_1 oder f_2, d.h. pro Sampling-Schritt um $\xi_h = e^{i\pi h/M}$ (wenn f_2) vor bzw. um $\overline{\xi}_h$ zurück (wenn f_1), um nach M Schritten um $\xi^M = e^{i\pi h}$ bzw. $\overline{\xi}^M = e^{-i\pi h}$ weitergedreht zu sein.

Wählt man nun $\widetilde{\omega}_c = f_1 = -f_2$, d.h. multipliziert man jeden Schritt zusätzlich mit ξ, so bewegt sich S entweder mit doppelter Frequenz $2f_2$ jeweils um $x = \xi^2 = e^{i2\pi h/M}$ vor oder bleibt konstant bei $\xi\overline{\xi} = 1$. Integriert bzw. summiert man nun über $0, \ldots, M-1$, erhält man entweder

$$X_1 = \sum_{m=0}^{M-1} x^m = \frac{1 - x^M}{1 - x} = \frac{1 - \xi^{2M}}{1 - \xi^2} = \frac{1 - e^{i2\pi h}}{1 - e^{i2\pi h/M}} \quad \text{oder}$$
$$X_2 = \sum_{m=0}^{M-1} 1 = M \quad , \quad \text{wobei} \quad |X_1| < M \quad .$$

Speziell für $h = 1\,(, 2, \ldots, M-1)$ (*Sunde's FSK*) ist $X_1 = 0$. Analog für $\widetilde{\omega}_c = f_2$.





Bei *Minimum Shift Keying* (MSK) ist der Modulations-Index $h = 1/2$, f_1 und f_2 unterscheiden sich um $\Delta f = 1/(2T)$, die Phase ändert sich in $[nT,(n+1)T]$ um $\pm\pi/2$.

Sei $S(0) = 1$, d.h. $\varphi(0) = 0$, und $|r(t)| = 1$. Dann gilt

$$\varphi(nT) = k_n \frac{\pi}{2} \quad , \quad k_n \in \{0,1,2,3\}$$

wobei $x_{n+1} = k_{n+1} - k_n \in \{1,-1\}$. Sei

$$S_n = I_n + iQ_n = e^{ik_n\frac{\pi}{2}} = i^{k_n} \in \{1, i, -1, -i\} \ .$$

Es gilt

$$S_n^2 = I_n^2 - Q_n^2 + i\,2I_nQ_n = (i^2)^{k_n} = (-1)^{k_n} \quad \rightsquigarrow \quad I_nQ_n = 0 \quad , \quad S_n^2 \in \{1,-1\} \ .$$

Phasendifferenz aufeinanderfolgender Konstellationspunkte $\angle(S_n, S_{n+1}) = \pm\pi/2$:

$$\begin{aligned} S_{n+1}\overline{S}_n &= e^{i(k_{n+1}-k_n)\frac{\pi}{2}} = I_{n+1}I_n + Q_{n+1}Q_n + i(Q_{n+1}I_n - I_{n+1}Q_n) \\ &= e^{ix_{n+1}\frac{\pi}{2}} = ix_{n+1} = i(Q_{n+1}I_n - I_{n+1}Q_n) \end{aligned}$$

Daher folgt

$$S_n \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad S_{n+1} \in i\mathbb{R} \ , \qquad (*)$$

und wegen $I_nQ_n = 0$ ist entweder $x_{n+1} = Q_{n+1}I_n$ oder $x_{n+1} = -I_{n+1}Q_n$.
O.E. sei $\varphi(0) = 0$, d.h. $S_0 = 1$.
Dann ist $S_{2n} \in \{1,-1\}$ und $S_{2n+1} \in \{i,-i\}$, denn

$$S_n\overline{S}_{n-1} = ix_n \quad \rightsquigarrow \quad S_n = ix_nS_{n-1} = i^2x_nx_{n-1}S_{n-2} = \ldots = i^n\prod_{j=1}^{n} x_j \ .$$

Da $I_0 = 1$, gilt mit $(*)$ zudem $Q_0 = 0 = Q_{2n}$ und $I_1 = 0 = I_{2n+1}$, daher

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= I_{2n}Q_{2n+1} \\ x_{2n+2} &= -Q_{2n+1}I_{2n+2} \quad . \end{aligned}$$

In $\big((2n-1)T,(2n+1)T\big)$ gilt $\operatorname{Re} S(t) = I(t) \lesseqgtr 0$, wobei $I(2nT) = I_{2n} = S_{2n}$.
In $\big(2nT,(2n+2)T\big)$ gilt $\operatorname{Im} S(t) = Q(t) \lesseqgtr 0$, wobei $Q((2n+1)T) = Q_{2n+1} = \frac{1}{i}S_{2n+1}$.
Somit können I und Q jeweils über den Zeitraum $2T$ gesampelt werden.
Im Intervall $nT \le t \le (n+1)T$ verbindet

$$S(t) = I(t) + iQ(t) = e^{i(k_n + (k_{n+1}-k_n)\frac{t-nT}{T})\frac{\pi}{2}} = e^{i(k_n + x_{n+1}\frac{t-nT}{T})\frac{\pi}{2}} = e^{i\varphi_{n+1}(t)}$$

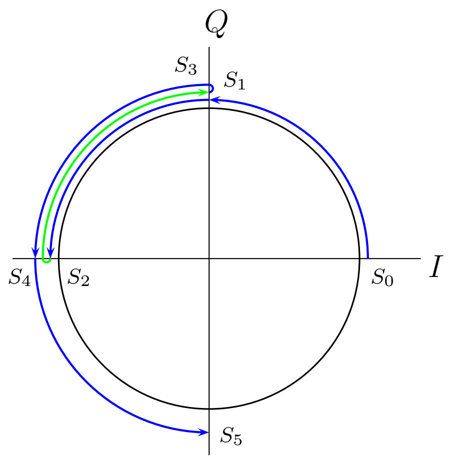
die Punkte S_n und S_{n+1} mit $\varphi'_{n+1}(t) = x_{n+1}\dfrac{\pi}{2T} = x_{n+1}\dfrac{2\pi}{4T} = \pm\dfrac{2\pi}{4T}$.

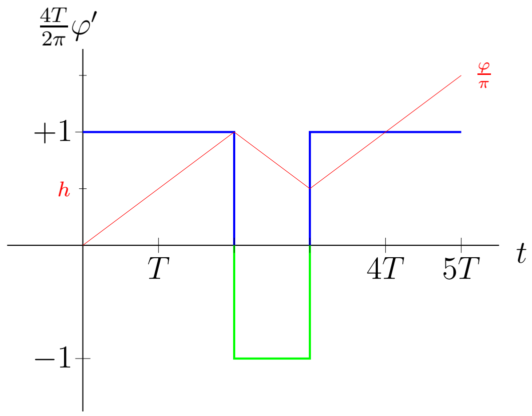
Beispiel:
Man startet bei $S_0 = 1$ und bewegt sich in Zeiträumen T jeweils um den Winkel $\pi/2$ vor oder zurück. Dann ist $S(t)$ zur Zeit $t = T$ entweder am Punkt $S_1 = i$ oder $S_1 = -i$. $S(t)$ verläuft für $0 < t < T$ in der oberen bzw. unteren Halbebene und bleibt auch dort bis $t = 2T$. Hier ist entweder $S_2 = -1$ oder wieder $S_2 = 1$ und für $T < t < 2T$ verläuft $S(t)$ in der linken bzw. rechten Halbebene und verbleibt dort bis $t = 3T$. So verläuft $S(t)$ durch die Quadranten und trifft bei $t = nT$ die Achsen. Der Realteil hat Nullstellen bei $2(n+1)T$ und der Imaginärteil bei $2nT$ jeweils in Abständen $2T$, dazwischen ändern sie ihr Vorzeichen nicht.

Betrachte die Bitfolge $b_n\ :\ 1, 1, 0, 1, 1$, d.h. die Signalfolge $x_{n+1} = 2b_{n+1} - 1\ :$ $+1, +1, -1, +1, +1$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{i} S_{n+1} \overline{S}_n = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\pi/2}\ :\ +1, +1, -1, +1, +1 \quad ,$$

wobei $S_0 = 1$, d.h. $\varphi_0 = 0$. Somit $S_n : 1\,,\ i\,,\ -1\,,\ i\,,\ -1\,,\ -i\,.$





t :	$-T$		0		T		$2T$		$3T$		$4T$		$5T$		$6T$
$\Delta\varphi$:				$+\frac{\pi}{2}$		$+\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$+\frac{\pi}{2}$		$+\frac{\pi}{2}$			
S_n :			1		i		-1		i		-1		$-i$		
sgn I :	$\vert$	$+$		$+$	$\vert$	$-$		$-$	$\vert$	$-$		$-$	$\vert$		
sgn Q :			$\vert$	$+$		$+$	$\vert$	$+$		$+$	$\vert$	$-$		$-$	$\vert$
IQ :	$\vert$		$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$		$\vert$
$(-1)^n$:	$\vert$	-1	$\vert$	$+1$	$\vert$	-1	$\vert$	$+1$	$\vert$	-1	$\vert$	$+1$	$\vert$	-1	$\vert$
x_{n+1} :	$\vert$		$\vert$	$+1$	$\vert$	$+1$	$\vert$	-1	$\vert$	$+1$	$\vert$	$+1$	$\vert$		$\vert$

denn

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= I_{2n} Q_{2n+1} \\ x_{2n+2} &= -Q_{2n+1} I_{2n+2} \quad . \end{aligned}$$

GFSK & GMSK.

Bei FSK/MSK wurde mit einer stetigen (Frequenz-)Funktion $u : \mathbb{R}\backslash T\mathbb{Z} \to \{-1,+1\}$ die Phase $\varphi(t) = h\pi \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{T} u(\tau)\, d\tau$ moduliert, wobei $u((n+\frac{1}{2})T) = x_{n+1}$.
Nun soll die Rechteckfunktion u mit einer Gauß-Funktion g geglättet werden, so dass die Frequenz durch $p = \frac{1}{T} u * g$ moduliert wird, d.h. $\varphi(t) = h\pi \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau$.

Faltung (*convolution*):

$$f * g\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$$

$$\gamma(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty+i\xi}^{\infty+i\xi} \gamma(t)\, dt = \sqrt{2\pi} \quad , \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon > 0 \quad , \quad \phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\, \gamma\Big(\frac{t}{\epsilon}\Big) \qquad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(t)\, dt = 1$$

$$f * \phi_\varepsilon \longrightarrow f \quad (\varepsilon \to 0)$$

normalized bandwidth:

$$\beta = BT \quad , \quad \sigma = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi B} = \frac{\lambda}{B} = \lambda \frac{T}{\beta} = \alpha T$$

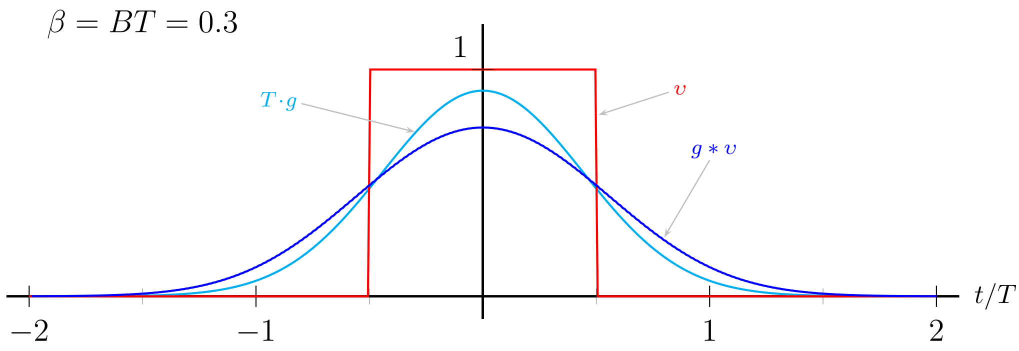
$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{T\sqrt{2\pi\alpha^2}}\, e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(\frac{t}{T})^2}$$

$$g(t) = \phi_\sigma(t) \qquad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, d\tau = 1$$

$$\upsilon(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -T/2 < t < T/2 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$g * \upsilon\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\upsilon(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} g(\tau)\, d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t+\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\upsilon(\tau)\, d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t-\tau)\, d\tau$$



$$u_n(t) = \begin{cases} 1 & , \quad nT < t < (n{+}1)T \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \upsilon(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_n(\tau)\, d\tau = T$$

$p_n = \frac{1}{T} u_n * g:$

$$p_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{T} u_n(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \int\limits_{t-(n+1)T}^{t-nT} g(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{0} g(t - nT + \tau)\, d\tau$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{T} u_n(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \int\limits_{nT}^{(n+1)T} g(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} g(t - nT - \tau)\, d\tau$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{T} u_n(t-\tau)\, dt\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, d\tau = 1$$

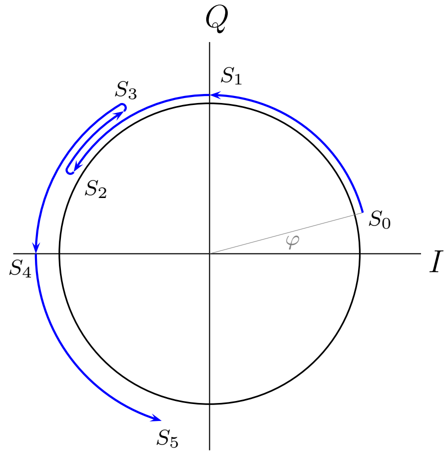
$$u(t) = \sum_n x_n u_n(t) \quad , \quad p(t) = \tfrac{1}{T} u * g\,(t) = \sum_n x_n p_n(t)$$

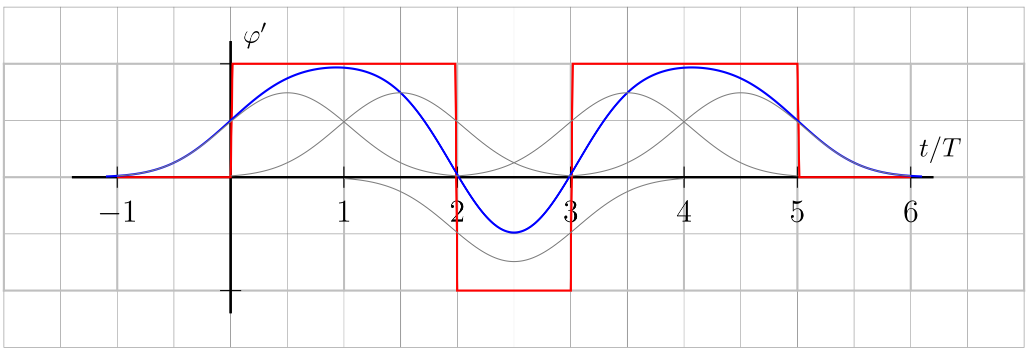
Für $\beta = BT \to \infty$ geht $\sigma \to 0$ und $p = \frac{1}{T} u * g \longrightarrow \frac{1}{T} u\,.$

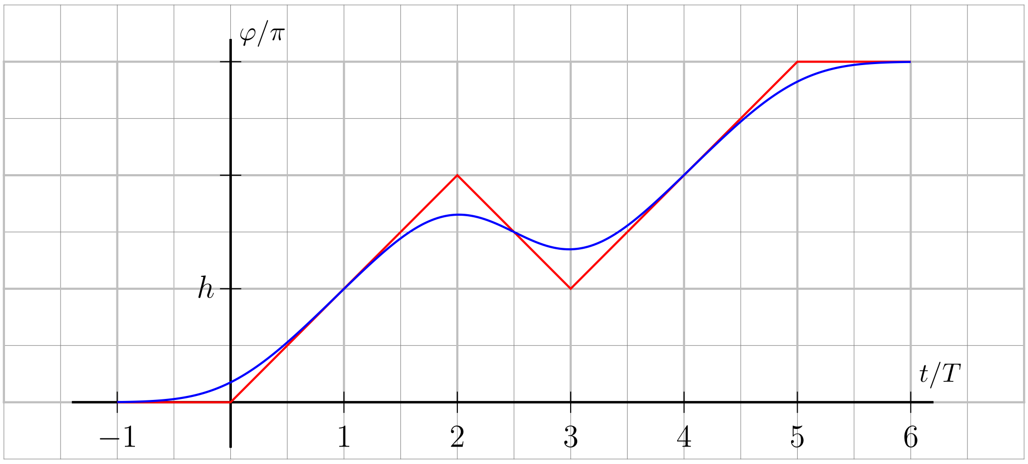
Modulations-Index $h = 0.5$, $\beta = BT = 0.3$, $x_{n+1}: +1, +1, -1, +1, +1$.

$$u(t) = \sum_n x_n u_n(t) \quad , \quad p(t) = \sum_n x_n p_n(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_n x_n g(t - nT - \tau)\, d\tau$$

$$\varphi(t) = h\pi \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau \quad , \quad S(t) = I(t) + iQ(t) = e^{i\varphi(t)}$$







Fourier transform.

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{F}f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Notation: $\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = F(\omega)$.

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$$
$$\sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$
$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}f(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t)$$

$$\langle \mathcal{F}f, h \rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{F}^{-1}h \rangle_{L^2}$$

$$\gamma(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{F}\gamma(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \phi_\sigma(t) \quad \longleftrightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \mathcal{F}g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \tfrac{1}{\sigma}\phi_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)$$

$\omega_B = \omega_{3\mathrm{dB}}$: $P = \frac{d}{dt}E = UI = U^2/R \;\rightsquigarrow\; \sqrt{P/2} \propto U/\sqrt{2}$

$$\hat{g}(\omega_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{g}(0) \quad \rightsquigarrow \quad e^{-\frac{\sigma^2\omega_B^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{\ln 2}{2}}$$

$$\rightsquigarrow \quad \ln 2 = \sigma^2\omega_B^2 = \frac{\ln 2}{(2\pi B)^2}\omega_B^2 \quad \rightsquigarrow \quad \omega_B = 2\pi B = 2\pi\beta/T$$

$$g(t) = \frac{1}{T}\frac{\beta}{\lambda\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\beta^2}{2\lambda^2}(\frac{t}{T})^2} \qquad \longleftrightarrow \qquad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\ln 2}{2\beta^2}(T\frac{\omega}{2\pi})^2}$$